TENTAMEN: DEL A
Reglerteknik I 5hp

Tid: Måndag 9 juni 2014, kl. 8.00-11.00

Plats: Bergsbrunnagatan 15, sal 1

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Examinationen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd krävs att man är godkänd på del A, och för detta krävs godkänt på varje uppgift. Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen).

Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar/motiveringar ska skrivas på angiven plats i detta provhäfte, och provhäftet ska lämnas in.
Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges).

LYCKA TILL!

Tentamenskod (alt. namn och personnummer)	
Utbildningsprogram	Termin och år då du först registrerades på kursen
Bordsnummer	Klockslag för inlämning

Resultat:

Uppg. 1	**Uppg. 2**	**Uppg. 3**	**Del A**
G/U	G/U	G/U	G/U

Uppgift 1 Systemet $Y(s) = G(s)U(s)$, med $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$, styrs med återkopplingen

$$U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s)), \qquad F(s) = 2 + \frac{1}{s} + 3s = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s}.$$

(a) Regulatorn $F(s)$ här ovan är av en standardtyp. **Ringa in** den av nedanstående benämningar som avser just denna regulatortyp.

Framkopplings-, PI-, PID-, PD-regulator.

Motivering:

(b) Man har följande två krav på det återkopplade systemet:
(i) slutna systemet ska vara stabilt, *(ii)* $\lim_{t\to\infty}(y_{ref} - y) = 0$ när y_{ref} är ett steg.
Uppfylls båda dessa krav med regulatorn $F(s)$ ovan? **Svar:**________________

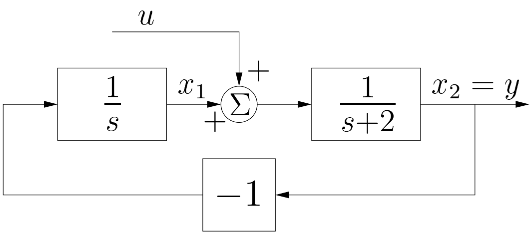
Lösning:

(c) Med regulatorn $F(s)$ ovan gäller för den komplementära känslighetsfunktionen att $|T(i\omega)| \leq 1.323$ för alla ω. $G(s)$ här ovan är en modell, och det *verkliga* systemet är $G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s))$, där $\Delta_G(s)$ är det *relativa modellfelet*. Anta att $T(s)$ är stabil och att $|\Delta_G(i\omega)| < 0.75$ för alla ω. Vad kan man säga om stabiliteten hos det *verkliga* återkopplade systemet?
Ringa in rätt alternativ:

Det är stabilt   Det är instabilt   Går ej att avgöra

Motivering:

Uppgift 2 Blockschemat nedan visar ett system med u som insignal och y som utsignal.



(a) Ställ upp en tillståndsbeskrivning för systemet. Använd tillståndsvektorn $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, med tillståndsvariablerna x_1 och x_2 enligt blockschemat.

Lösning & svar:

(b) Vad har systemet för *poler*? **Svar:**____________________
Vad har systemet för *nollställen*? **Svar:**____________________

Lösning:

Uppgift 3 Ett system har tillståndsbeskrivningen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix} x(t).$$

(a) Avgör huruvida tillståndsbeskrivningen är en *minimal realisation* eller inte. **Svar:**______________________________

Motivering:

(b) Ange systemets överföringsfunktion. **Svar:**_____________________

Lösning:

(c) Systemet styrs med tillståndsåterkoppling, $u(t) = -L\hat{x}(t) + my_{ref}(t)$, där $\hat{x}(t)$ fås från en observatör. Bestäm L och m i tillståndsåterkopplingen så att det slutna systemet får polpolynomet $s^2 + 6s + 18$, och statisk förstärkning lika med ett från y_{ref} till y.

Svar:__________________________________

Lösning:

Vid behov kan du fortsätta dina lösningar/motiveringar på detta ark. Markera tydligt vilken uppgift som avses.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del A 2014-06-09

1. (a) $F(s) = 2 + 1/s + 3s$, där 2 är proportionell, $1/s$ är integrerande och $3s$ är deriverande. Alltså en PID-regulator.
(b) Eftersom $Y(s) = G(s)F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s))$ blir slutna systemet

$$Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} Y_{ref}(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s(s^2 + 1) + 3s^2 + 2s + 1} Y_{ref}(s).$$

Nämnarpolynomet är $s(s^2 + 1) + 3s^2 + 2s + 1 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = (s + 1)^3$. Slutna systemet har alltså en trippelpol i -1, och är alltså stabilt. Om man missar det kollar man stabiliteten med Rouths algoritm, utifrån $0 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 8/3 & 0 & \\ 1 & & \end{array}$$

Alla koefficienter i vänstraste kolumnen är strikt positiva $\Rightarrow$ stabilt. Då $y_{ref} =$ (enhets-) steg blir $Y_{ref}(s) = 1/s$, och med slutvärdesteoremet fås

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(1 - \frac{3s^2 + 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}\right)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{s^3 + s}{(s + 1)^3} = 0.$$

Båda kraven är alltså uppfyllda!
(c) Resultat 6.2 säger att om $T(s)$ (för modellen) är stabil, och om $|T(i\omega)| < 1/|\Delta_G(i\omega)|$ för alla ω, då är *verkliga* systemet garanterat stabilt. Här är $|T(i\omega)| \le 1.323$ och $|\Delta_G(i\omega)| < 0.75 \Leftrightarrow 1/|\Delta_G(i\omega)| > 1/0.75 = 4/3 \approx 1.333$. Alltså är $|T(i\omega)| < 1/|\Delta_G(i\omega)|$, och därmed är verkliga slutna systemet stabilt!

2. (a) Från blockschemat fås

$$X_1(s) = \frac{1}{s}(-X_2(s)) \quad \Leftrightarrow \quad sX_1(s) = -X_2(s),$$
$$X_2(s) = \frac{1}{s+2}(X_1(s) + U(s)) \quad \Leftrightarrow \quad sX_2(s) = X_1(s) - 2X_2(s) + U(s),$$

och att $Y(s) = X_2(s)$. Med inversa Laplacetransformen fås då

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_2, \\ \dot{x}_2 & = x_1 - 2x_2 + u, \\ y & = x_2, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} & = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y & = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

(b) Bestäm först överföringsfunktionen, $G(s)$:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}.$$

($G(s)$ kan också beräknas utifrån blockschemat.) Polerna ges av $0 = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2$, d.v.s. en dubbelpol i -1. Det finns ett nollställe i origo.

3. (a) Resultat 8.11: Minimal realisation $\Leftrightarrow$ både styrbart och observerbart. Systemet står på styrbar kanonisk form $\Rightarrow$ styrbart. Observerbarhetsmatrisen är

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \left(\text{och} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \right).$$

$\mathcal{O}$ har *inte* full rang och därför är systemet ej observerbart. Alltså är det inte en minimal realisation.

(b) Styrbar kanonisk form $\Rightarrow G(s) = \frac{2s+6}{s^2+4s+3} = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+3)} = \frac{2}{s+1}$.

(c) Det slutna systemet blir $Y(s) = G_c(s) m Y_{ref}(s)$, med $G_c(s) = C(sI - A + BL)^{-1}B = \frac{b(s)}{\alpha(s)}$, där $b(s)$ är det öppna systemets täljarpolynom, dvs $b(s) = 2s + 6$ här, och $\alpha(s) = \det(sI - A + BL)$ är slutna systemets polpolynom. Detta gäller oavsett om observatör används eller inte. Önskat polpolynom är $s^2 + 6s + 18$.

$$\alpha(s) = \det(sI - A + BL) = \det \begin{bmatrix} s + 4 + l_1 & 3 + l_2 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + (4 + l_1)s + 3 + l_2.$$

Identifiering av koefficienter ger $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 15 \end{bmatrix}$. Vill ha statisk förstärkning lika med ett, dvs $1 = G_c(0)m = \frac{6m}{18} \Rightarrow$ välj $m = 3$.