TENTAMEN: DEL A
Reglerteknik I 5hp

Tid: Torsdag 19 mars 2015, kl. 8.00-11.00

Plats: Fyrislundsgatan 80, sal 1

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Examinationen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd krävs att man är godkänd på del A, och för detta krävs godkänt på varje uppgift. Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen).

Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar/motiveringar ska skrivas på angiven plats i detta provhäfte, och provhäftet ska lämnas in.
Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges).

LYCKA TILL!

Tentamenskod	(alt. namn och personnummer)
Utbildningsprogram	Termin och år då du först registrerades på kursen
Bordsnummer	Klockslag för inlämning

Resultat:

Uppg. 1	**Uppg. 2**	**Uppg. 3**	**Del A**
G/U	G/U	G/U	G/U

Uppgift 1 Betrakta följande fyra överföringsfunktioner:

$$G_1(s) = \frac{2}{s^2+2s+2},\; G_2(s) = \frac{1}{s^2+2s+1},\; G_3(s) = \frac{2}{s^2+s+2},\; G_4(s) = \frac{8}{s^2+4s+8}.$$

(a) Man utför stegsvarsexperiment på systemen med överföringsfunktionerna $G_1(s)$–$G_4(s)$. Vilket av systemen har *störst* översläng, M? **Svar:**__________
Vilket har *kortast* stigtid, T_r? **Svar:**__________

Motivering:

(b) En inverterad pendel har tillståndsbeskrivningen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

Är tillståndsbeskrivningen en *minimal realisation*? **Svar:**____________________

Motivering:

(c) När den inverterade pendeln i (b) styrs med tillståndsåterkopplingen

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} x(t) + y_{ref}(t)$$

blir det slutna systemet $Y(s) = G_c(s)Y_{ref}(s)$, där $G_c(s)$ är en av överföringsfunktionerna $G_1(s)$–$G_4(s)$ ovan — ange vilken! **Svar:**__________________________

Lösning:

Uppgift 2 Ett system styrs med återkoppling från reglerfelet:

$$Y(s) = G(s)U(s), \qquad U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s))$$

Systemet har statisk förstärkning $G(0) = 4$.

(a) Ringa in den/de regulatortyp/-er (för $F(s)$) nedan som ger *känslighetsfunktionen* statisk förstärkning $S(0) = 0$:

P-, PI-, PD-, PID-regulator

Motivering (krävs):

(b) Anta att regulatorn $F(s) = K$ används, och att $K \in \mathbb{R}$ väljs så att slutna systemet blir stabilt. Hur stort blir det kvarvarande felet, $\lim_{t\to\infty}(y_{ref}(t) - y(t))$, då $y_{ref}(t)$ är ett enhetssteg? Ange svaret uttryckt i K.

Svar:____________________________

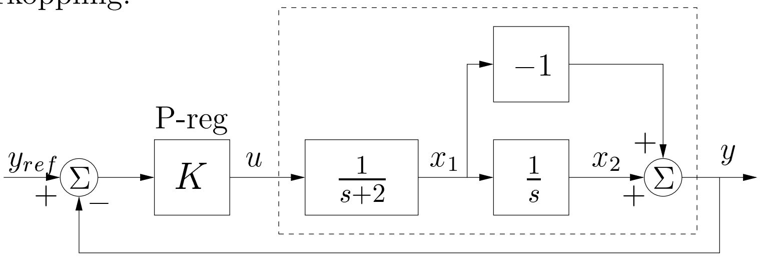
Lösning:

(c) Anta igen att regulatorn $F(s) = K$ används, men att det finns en mätstörning så att styrlagen blir $u(t) = K(y_{ref}(t) - y_m(t))$, där $y_m(t) = y(t) + n(t)$ är den uppmätta utsignalen och $n(t)$ är mätstörningen. Ange överföringsfunktionen från n till y för det återkopplade systemet.

Svar:____________________________

Lösning:

Uppgift 3 Blockschemat nedan visar ett system som styrs med proportionell återkoppling.



(a) Ställ upp tillståndsbeskrivningen för det *öppna* systemet, d.v.s. delen innanför den streckade rektangeln i blockschemat, med u som insignal och y som utsignal. Använd $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ som tillståndsvektor, med x_1 och x_2 enligt blockschemat.

Svar och lösning:

(b) Ange överföringsfunktionen från y_{ref} till y för det *återkopplade* systemet.
Svar:____________________

Vad har slutna systemet för nollställen? **Svar:**____________________

Lösning:

(c) För vilka $K \in \mathbb{R}$ är det återkopplade systemet stabilt? **Svar:**__________

Motivering:

Vid behov kan du fortsätta dina lösningar/motiveringar på detta ark. Markera tydligt vilken uppgift som avses.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del A 2015-03-19

1. (a) Jämför med $G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$: T_r minskar när ω_0 (polernas avstånd från origo) ökar, M ökar när ζ ($= \cos\phi$, där ϕ är vinkeln till negativa reella axeln) minskar — se exempel 3.3 i Glad/Ljung. Här har vi

$$G_1 : \omega_0 = \sqrt{2},\ \zeta = 1/\sqrt{2}, \qquad G_2 : \omega_0 = 1,\ \zeta = 1,$$
$$G_3 : \omega_0 = \sqrt{2},\ \zeta = 1/\sqrt{8}, \qquad G_4 : \omega_0 = \sqrt{8},\ \zeta = 1/\sqrt{2}.$$

Störst $M \leftrightarrow$ minst $\zeta \leftrightarrow G_3$. Kortast $T_r \leftrightarrow$ störst $\omega_0 \leftrightarrow G_4$.
(b) Minimal realisation $\Leftrightarrow$ både styrbart och observerbart (Resultat 8.11). Systemet på observerbar kanonisk form $\Rightarrow$ observerbart. Styrbarhetsmatrisen är

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{S} = -1 \neq 0.$$

Systemet är alltså också styrbart, och därmed en minimal realisation.
(c) Vi har $G(s) = \frac{1}{s^2-1}$ (fås direkt eftersom observerbar kanonisk form). Slutna systemet blir $G_c(s) = \frac{b(s)}{\alpha(s)}$ där $b(s) = 1$ fås från $G(s)$, och

$$\alpha(s) = \det(sI - A + BL) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 + l_1 & s + l_2 \end{bmatrix} = s^2 + l_2 s - 1 + l_1 = s^2 + 2s + 1,$$

eftersom $l_1 = l_2 = 2$. Alltså är $G_c(s) = \frac{1}{s^2+2s+1} = G_2(s)$.

2. (a) $S(s) = \frac{1}{1+G_o(s)}$ där $G_o(s) = F(s)G(s)$. För att få $S(0) = 0$ måste $G_o(s)$ ha integralverkan, d.v.s. en pol i origo, och eftersom $G(0) = 4$ här måste alltså $F(s)$ ha integralverkan $\Rightarrow$ $F(s)$ måste vara en PI- eller PID-regulator.
(b) Använd slutvärdesteoremet:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{1}{s} = S(0) = \frac{1}{1 + KG(0)} = \frac{1}{1 + 4K}$$

(c) Vi har

$$Y(s) = G(s)K(Y_{ref}(s) - Y(s) - N(s)) \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}(Y_{ref}(s) - N(s)),$$

d.v.s. överföringsfunktionen från n till y är $-\frac{K_G(s)}{1+KG(s)}$ (vilket är $-T(s)$).

3. (a) Från blockschemat fås

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2}U(s) \quad \Leftrightarrow \quad (s+2)X_1(s) = U(s) \quad \Leftrightarrow \quad sX_1(s) = -2X_1(s) + U(s),$$
$$X_2(s) = \frac{1}{s}X_1(s) \quad \Leftrightarrow \quad sX_2(s) = X_1(s), \quad \text{samt} \quad Y(s) = -X_1(s) + X_2(s).$$

Med inversa Laplacetransformen får vi då

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2x_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ y &= -x_1 + x_2, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

(b) Utgå från $Y(s) = G(s)U(s)$ och $U(s) = K(Y_{ref}(s) - Y(s))$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = G_c(s)Y_{ref}(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} Y_{ref}(s).$$

Notera att systemet i (a) står på styrbar kanonisk form $\Rightarrow$ direkt fås $G(s) = \frac{-s+1}{s^2+2s}$. (Går också bra att använda $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$.) Därför blir

$$G_c(s) = \frac{\frac{K(-s+1)}{s^2+2s}}{1 + \frac{K(-s+1)}{s^2+2s}} = \frac{K(-s+1)}{s^2 + 2s + K(-s+1)} = \frac{K(-s+1)}{s^2 + (2-K)s + K}.$$

Slutna systemet har ett nollställe, i $+1$.
(c) Polpolynomet är $s^2 + (2 - K)s + K$. För stabilitet krävs att alla poler ligger i vänster halvplan, vilket för ett andra ordningens system är ekvivalent med att alla koefficienter i polpolynomet är strikt positiva. Alltså stabilt för $0 < K < 2$. (Går också bra att använda Rouths algoritm.)