TENTAMEN: DEL B
Reglerteknik I 5hp

Tid: Torsdag 19 mars 2015, kl. 13.00-16.00

Plats: Fyrislundsgatan 80, sal 1

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 14.30.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Skrivningen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd på skrivningen krävs att man är godkänd på del A.
Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen.)
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar lämnas in på separata papper. Endast en uppgift per ark. Skriv din tentakod på varje ark.

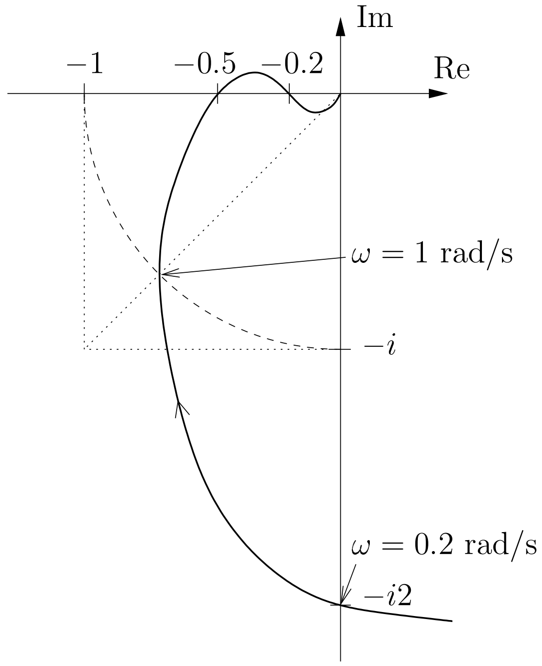
Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

LYCKA TILL!

Uppgift 1 Ett stabilt system $Y(s) = G(s)U(s)$ ska styras med återkoppling från reglerfelet,

$$U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s)).$$

Nedan visas Nyquistkurvan då $F(s) = 1$, d.v.s. frekvenssvaret för systemet självt, $G(i\omega)$.



(a) Dimensionera en regulator $F(s)$ sådan att kretsförstärkningen får skärfrekvensen $\omega_c = 1$ rad/s och fasmarginalen $\varphi_m \geq 60°$. **(2p)**

(b) Anta att $F(s) = K$, d.v.s. en P-regulator. För vilka $K \geq 0$ är det slutna systemet stabilt? **(1p)**

(c) Anta nu istället att $F(s) = \frac{K}{s}$, d.v.s. en rent integrerande regulator. För vilka $K \geq 0$ är då det slutna systemet stabilt? **(1p)**

(d) Anta slutligen att $F(s) = e^{-sT}$, d.v.s. P-reglering med en tidsfördröjning på T sekunder. För vilka tidsfördröjningar $T \geq 0$ är det slutna systemet stabilt? **(1p)**

Uppgift 2 Ett system bestående av två seriekopplade vattentankar beskrivs av tillståndsbeskrivningen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + n(t),$$

där u är inflödet till den första tanken (vars utflöde är inflödet till den andra tanken), och y är den uppmätta vattennivån i den andra tanken. Den uppmätta nivån påverkas också av en mätstörning n (effekt av vågskvalp etc.). För att filtrera bort effekten av mätstörningen använder man sig av en observatör, som ger skattningen $\hat{x}$ av tillståndsvektorn x.

(a) Dimensionera en observatör för systemet, med en dubbel observatörspol i punkten -2. **(2p)**

(b) Skattningsfelet är $\tilde{x}$, och definieras som $\tilde{x} = x - \hat{x}$. Skattningen av utsignalen (utan mätstörning) är $\hat{y} = C\hat{x}$, där $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. På samma sätt blir skattningsfelet på utsignalen $\tilde{y} = C\tilde{x}$. Bestäm överföringsfunktionen från mätstörningen n till skattningsfelet $\tilde{y}$ när observatören i (a) används. **(1p)**

(c) Anta nu att $n(t) = 0$ och att $\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Ange ett uttryck för hur skattningsfelet $\tilde{x}(t)$ utvecklas i tiden för $t \geq 0$, samt bestäm $\tilde{x}(1)$ (ett numeriskt värde). **(2p)**

Uppgift 3 Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) Den maximala fasavancering, φ_{max}, som kan åstadkommas med ett leadfilter, $F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}$, beror på tidskonstanten τ_D.

(b) Om man väljer parametern $\gamma = 0$ så blir lagfiltret, $F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}$, en PI-regulator.

(c) En asymptotiskt stabil tillståndsbeskrivning är insignal-utsignalstabil *endast* om den är en minimal realisation.

(d) Om man styr systemet $Y(s) = \frac{s+1}{s^2+s+2}U(s)$ med tillståndsåterkoppling är det möjligt att få det slutna systemet att bli $Y(s) = \frac{10}{s+10}Y_{ref}(s)$.

(e) Systemet $Y(s) = G(s)U(s)$ är insignal-utsignalstabilt och har minst ett nollställe med strikt positiv realdel. Om man styr systemet med styrlagen $u = K(y_{ref} - y)$ blir det slutna systemet instabilt för något K, $0 < K < \infty$.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(5p)**

Uppgift 4 Man vill styra en DC-motor, och använder modellen

$$Y(s) = G(s)U(s), \qquad G(s) = \frac{1}{s(s+1)},$$

där u är spänningen över motorn och y är motoraxelns vinkelutslag. Man vet att det relativa modellfelet, $\Delta_G(s)$, uppfyller

$$|\Delta_G(i\omega)| < 0.2\omega, \quad \text{för alla} \quad \omega \geq 0. \tag{1}$$

Proportionell återkoppling ska användas:

$$u(t) = K(y_{ref}(t) - y(t)), \quad K \in \mathbb{R}.$$

(a) Gör följande antagande: Det verkliga systemet är

$$G^0(s) = \frac{1}{s(s+1)(\tau s+1)}, \quad \text{där} \quad 0 < \tau < 0.2,$$

d.v.s. modellfelet beror på en extra, omodellerad pol. För vilka $K \in \mathbb{R}$ är det slutna systemet stabilt under detta antagande? **(2p)**

(b) Bestäm det relativa modellfelet, $\Delta_G(s)$, under antagandet i (a). Uppfyller detta $\Delta_G(s)$ villkoret (1) ovan? **(1p)**

(c) Bortse nu från antagandet i (a). För vilka $K \in \mathbb{R}$ kan det slutna systemets stabilitet *garanteras* (förutsatt att (1) är uppfyllt)? **(2p)**

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del B 2015-03-19

1. (a) Av Nyquistdiagrammet framgår att $|G(i)| = 1$ och $\arg G(i) = -135°$. Det är alltså 45° kvar ner till $-180°$ vid den önskade $\omega_c = 1$ rad/s, så $F(s)$ måste skjuta till 15° $\Rightarrow$ använd ett leadfilter. (Inga krav på noggrannhet $\Rightarrow$ inget lagfilter behövs.) Fig. 5.13 $\Rightarrow$ välj $\beta = 0.58$. Se till att maxfasen inträffar vid $\omega_c \Rightarrow$ välj $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{0.58}} = 1.31$. Slutligen, se till att $\omega_c = 1$ rad/s verkligen blir skärfrekvens:

$$1 = |G_o(i\omega_c)| = |F_{lead}(i\omega_c)||G(i\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}|G(i\omega_c)|$$

$$\Leftrightarrow \quad K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.58}}{1} = 0.76.$$

Regulatorn = leadfiltret blir

$$F(s) = F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1} = 0.76\frac{1.31s + 1}{0.58 \cdot 1.31s + 1}$$

(b) Kretsförstärkningen blir $G_o(s) = KG(s)$, så Nyquistkurvan, $G_o(i\omega) = KG(i\omega)$, skär negativa reella axeln i punkterna $-0.2K$ och $-0.5K$. Enligt Nyquistkriteriet är slutna systemet stabilt ifall -1 ligger till vänster om skärningspunkten $-0.5K$ eller till höger om $-0.2K$. Villkoren för stabilitet blir alltså

$$-0.5K > -1 \quad \Leftrightarrow \quad K < 2, \quad \text{eller} \quad -0.2K < -1 \quad \Leftrightarrow \quad K > 5.$$

(c) Nu blir kretsförstärkningen $G_o(s) = \frac{K}{s}G(s)$. Låt $G(i\omega) = x(\omega) + iy(\omega)$, d.v.s. x är realdelen, och y är imaginärdelen av frekvenssvaret för $G(s)$. Nyquistkurvan blir då

$$G_o(i\omega) = \frac{K}{i\omega}G(i\omega) = \frac{K}{i\omega}(x(\omega) + iy(\omega)) = \frac{K}{\omega}(y(\omega) - ix(\omega)).$$

Negativa reella axeln skärs $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(G_o(i\omega)) = 0$, vilket sker då $x(\omega) = 0$. Nyquistdiagrammet ger att $x(0.2) = 0$ och att $y(0.2) = -2$. Negativa reella axeln skärs alltså i $G_o(i0.2) = \frac{K}{0.2} \cdot (-2) = -10K$, och för stabilitet krävs då

$$-10K > -1 \quad \Leftrightarrow \quad K < 0.1.$$

(d) Denna gång blir kretsförstäkningen $G_o(s) = e^{-sT}G(s)$. Vi noterar att

$$|G_o(i\omega)| = |e^{-\omega T}||G(i\omega)| = |G(i\omega)|,$$
$$\arg G_o(i\omega) = \arg e^{-\omega T} + \arg G(i\omega) = -\omega T + \arg G(i\omega).$$

Beloppet blir alltså oförändrat jämfört med $G(s)$, bara fasen påverkas. Vi kan nu studera var Nyquistkurvan skär enhetscirkeln $\Leftrightarrow |G_o(i\omega)| = 1$. Nyquistdiagrammet ger att $|G(i)| = 1$ och att $\arg G(i) = -135° = -\frac{3\pi}{4}$ radianer. Nyquistkurvans skärning med enhetscirkeln måste ske under negativa reella axeln, d.v.s. att $\arg G_o(i) > -180° = -\pi$ radianer. Villkoret för stabilitet blir alltså

$$-\pi < \arg G(i\omega) - \omega T = -\frac{3\pi}{4} - \omega T \quad \Leftrightarrow \quad \omega T < \frac{\pi}{4}.$$

Eftersom $\omega = \omega_c = 1$ rad/s måste alltså $T < \frac{\pi}{4} = 0.785$ sekunder gälla.

2. (a) En observatör:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}).$$

Observatörspolerna ges av $0 = \det(sI - A + KC)$. Här blir

$$\det(sI - A + KC) = \det \begin{bmatrix} s+2+k_1 & -1 \\ 1+k_2 & s \end{bmatrix} = s^2 + (2+k_1)s + 1 + k_2,$$

vilket kan jämföras med det önskade observatörspolynomet $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$. Identifiering av koefficienter ger $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$.

(b) Skattingsfelet beskrivs av tillståndsekvationen

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} - Kn,$$

se t.ex. ekv. (9.31) på sid. 199, alternativt onumrerad ekvation på sid. 201 i kursboken. Med $\tilde{y} = C\tilde{x}$, samt Resultat 8.3, fås då att $\tilde{Y}(s) = -C(sI - A + KC)^{-1}KN(s)$. Här blir

$$\begin{aligned} -C(sI - A + KC)^{-1}K &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2+k_1 & -1 \\ 1+k_2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{k_1 s + k_2}{s^2 + (2+k_1)s + 1 + k_2} = -\frac{2s+3}{s^2+4s+4}. \end{aligned}$$

(c) Med tillståndsbeskrivningen för $\tilde{x}$ i (b), samt Resultat 8.4, fås att

$$\tilde{x}(t) = e^{(A-KC)t}\tilde{x}(0) - \int_0^t e^{(A-KC)\tau} Kn(t-\tau)d\tau = e^{(A-KC)t}\tilde{x}(0),$$

där andra likheten följer av att $n(t) = 0$. Här blir

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A + KC)^{-1}\tilde{x}(0)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} s+4 & -1 \\ 4 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+4s+4} & \frac{1}{s^2+4s+4} \\ \frac{4}{s^2+4s+4} & \frac{s+4}{s^2+4s+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} \\ \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} te^{-2t} \\ (1+2t)e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Därmed blir

$$\tilde{x}(1) = \begin{bmatrix} e^{-2} \\ 3e^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.135 \\ 0.406 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Falskt (den beror endast på parametern β);
(b) Sant;

(c) Falskt (Resultaten 8.6 och 8.7 $\Rightarrow$ minimal realisation *ej* nödvändigt);
(d) Sant (använd polplacering och lägg en pol i -1 och en i -10);
(e) Sant (i rotorten för det slutna systemets poler blir G:s poler startpunkter och G:s nollställen blir ändpunkter, och när K växer går polerna mot ändpunkterna, varav minst en är i HHP).

4. **(a)** Under antagandet blir kretsförstärkningen $G_o(s) = \frac{K}{s(s+1)(\tau s+1)}$.
Slutna systemets poler ges av

$$0 = 1 + G_o(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(\tau s+1)} \quad \Leftrightarrow$$
$$0 = s(s+1)(\tau s+1) + K = \tau s^3 + (\tau+1)s^2 + s + K.$$

Stabiliteten kan avgöras med Rouths algoritm:

$$\begin{array}{ccc} \tau & 1 & 0 \\ \tau+1 & K & 0 \\ 1 - K\frac{\tau}{\tau+1} & 0 & \\ K & & \end{array}$$

Eftersom $\tau > 0$ blir villkoret för stabilitet

$$K > 0 \quad \text{och} \quad 1 - K\frac{\tau}{\tau+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < K < 1 + \frac{1}{\tau}.$$

Eftersom $\tau < 0.2 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\tau} > 6$, och att villkoret ovan måste var uppfyllt för alla $0 < \tau < 0.2$, så måste $0 < K < 6$ gälla.
(b) Relativa modellfelet blir

$$\Delta_G(s) = \frac{G^0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+1)(\tau s+1)} - \frac{1}{s(s+1)}}{\frac{1}{s(s+1)}} = \frac{1}{\tau s+1} - 1 = \frac{-\tau s}{\tau s+1}.$$

Vidare har vi

$$|\Delta_G(i\omega)| = \left|\frac{i\tau\omega}{i\tau\omega+1}\right| = \frac{\tau\omega}{\sqrt{(\tau\omega)^2+1}} \leq \tau\omega < 0.2\omega.$$

Alltså är villkoret (1) uppfyllt.
(c) Robusthetskriteriet i Resultat 6.2 ger att det verkliga slutna systemet är stabilt om $T(s)$ är stabil och om $|T(i\omega)| < 1/|\Delta_G(i\omega)|$ för alla ω. Här blir

$$T(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)}} = \frac{K}{s^2+s+K},$$

och $T(s)$ är stabil för $K > 0$.
Robustkriteriet kan skrivas $|\Delta_G(i\omega)| \cdot |T(i\omega)| < 1$, för alla ω, vilket p.g.a. (1) är uppfyllt om $0.2\omega|T(i\omega)| < 1 \Leftrightarrow \omega^2 \cdot |T(i\omega)|^2 < 25 \Leftrightarrow$

$$25 > \frac{\omega^2 K^2}{(K-\omega^2)^2 + \omega^2} \quad \Leftrightarrow \quad 25[\omega^4 + (1-2K)\omega^2 + K^2] > K^2\omega^2$$
$$\Leftrightarrow \quad f(\omega^2) = 25\omega^4 + (25 - 50K - K^2)\omega^2 + 25K^2 > 0,$$

d.v.s. robusthetskriteriet är uppfyllt om $f(\omega^2) > 0$. Låt nu $x = \omega^2$. Då blir villkoret $f(x) > 0$ för alla $x \geq 0$ (eftersom $x = \omega^2 \geq 0$ för alla ω). Vi ska nu hitta $K > 0$ sådana att

$$f(x) = 25x^2 + (25 - 50K - K^2)x + 25K^2 > 0, \quad \text{för alla} \quad x \geq 0.$$

Vi noterar nu att $f(x)$ är en parabel (andragradskurva) som har ett minimumvärde (x^2-termen positiv), samt att $f(0) = 25K^2 > 0$. Låt minimumvärdet antas vid $x = x_{min}$, så att $f_{min} = f(x_{min})$. Om $f_{min} > 0$ eller om $x_{min} < 0$ så är $f(x) > 0$ för $x \geq 0$. Derivera:

$$\frac{df}{dx} = 50x + 25 - 50K - K^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{min} = -\frac{25 - 50K - K^2}{50}.$$

Vi känner igen detta från x-koefficienten, och kan alltså skriva

$$f(x) = 25x^2 - 50x_{min}x + 25K^2 \quad \Rightarrow$$
$$f_{min} = f(x_{min}) = 25x_{min}^2 - 50x_{min}^2 + 25K^2 = \frac{50^2K^2 - 50^2x_{min}^2}{100}.$$

Villkoret $f_{min} > 0$ innebär då att $50^2K^2 > 50^2x_{min}^2 \Leftrightarrow 50K > 50x_{min}$ (eftersom bara $K > 0$ och $x_{min} > 0$ är intressanta), så vi får

$$50K > K^2 + 50K - 25 \quad \Leftrightarrow \quad K^2 - 25 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |K| < 5.$$

Eftersom $K > 0$ kan stabiliteten garanteras för $0 < K < 5$.