Lösningar till tentamen i Reglerteknik III

Tentamensdatum: 18 December 2013

1. (a) $G(0) = \begin{pmatrix} 2/3 & -10 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$, $G(0)^{-1} = \frac{1}{452}\begin{pmatrix} 3 & 30 \\ 45 & 2 \end{pmatrix}$, $RGA(G(0)) = \frac{1}{452}\begin{pmatrix} 2 & 450 \\ 450 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) En instabil pol ger krav på en undre gräns på bandbredden för det slutna systemet, medan ett instabilt nollställe ger krav för en övre gräns för bandbredden. Ligger polen till höger om nollstället får man motstridiga krav och det kan bli svårt att få bra prestanda eller överhuvudtaget stabilisera systemet.

   (c) Låt $G(s) = \frac{1}{s+2}$ och $G_d(s) = \frac{2}{s+3}$. För perfekt störningsundertryckning måste då $u = -G^{-1}G_d v$ gälla. Med störningen $v(t) = 2\sin(3t)$ blir u också en sinus, förstärkt med faktorn $|G^{-1}(i3)G_d(i3)|$. Vi får då kravet $u_0 \geq |G^{-1}(i3)G_d(i3)|2 = \frac{2}{3}\sqrt{26} \approx 3.40$.

   (d) Frekvensfunktionen är

$$G(i\omega) = \frac{1}{i\omega + 1} = \frac{1}{\omega^2 + 1} - i\frac{\omega}{\omega^2 + 1}$$

   Realdelen är alltså positiv för alla frekvenser. Cirkeln får alltså ligga var som helst i vänster halvplan. Detta motsvarar att vi ska kunna stänga in den statiska olinjäriteten mellan två linjer genom origo, en med lutning noll och en med oändlig lutning.

2. (a) Den olinjära tillståndsbeskrivningen av systemet är

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{kTu}{mx_1} + g =: f(x_1, u). \end{aligned}$$

   (b) Antag att $x_1 = x_{1,0}$, $x_2 = x_{2,0}$ och $u = u_0$ är en jämviktspunkt till systemet, dvs. att $x_{2,0} = 0$ och $f(x_{1,0}, u_0) = 0$. Låt $\tilde{x}_1 = x_1 - x_{1,0}$, $\tilde{x}_2 = x_2 - x_{2,0}$ och $\tilde{u} = u - u_0$. Linjäriseringen av det olinjära systemet runt jämviktspunkten kan då skrivas

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{kTu_0}{mx_{1,0}^2} & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{kT}{mx_{1,0}} \end{pmatrix}}_{=:B} \tilde{u}. \tag{1}$$

   Polerna till det linjäriserade systemet ges av egenvärdena till A-matrisen, dvs.

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{kTu_0}{mx_{1,0}^2} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{kTu_0}{mx_{1,0}^2}}.$$

   (c) När x_1 $(= x)$ ökar kommer polen i höger halvplan, $\sqrt{\frac{kTu_0}{mx_{1,0}^2}}$, att ligga närmare den imaginära axeln och kravet på ett snabbt slutet system minskar därför. Detta gör det lättare att styra systemet. Emellertid kommer även $B_{2,1}$-elementet, $-\frac{kT}{mx_{1,0}}$, att gå mot 0 när x_1 ökar. Detta innebär att det på ett stort djup kommer att krävas en större styrsignal för att påverka accelerationen lika mycket som på ett mindre djup, dvs. att det i den meningen blir svårare att styra systemet.

   (d) Cirkelkriteriet kan bara användas på slutna system där de ingående linjära delsystemen saknar poler i höger halvplan. Eftersom det linjäriserade systemet är instabilt kan cirkelkriteriet därför inte användas här.

3. Jämviktspunkter fås då man löser $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, dvs då $x_1 = x_2 = 0$ och $x_1 = x_2 = 1$ samt $x_1 = 1, x_2 = -1$.

   Linjärisering ger: $\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 2x_2 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{pmatrix} z$.

   Med insatta värden fås i första fallet $\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z$ med egenvärdena: $\lambda = \pm 1$, dvs sadelpunkt.

I andra fallet fås $\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z$ med egenvärdena: $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$, dvs stabilt fokus.

I tredje fallet fås $\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z$ som också har egenvärdena: $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$, dvs stabilt fokus.

4. (a)

$$\dot{V} = V_x \dot{x} = -2x_1^4 + 2x_1 u + 2x_1 x_2.$$

Detta motiverar följande val av styrlag

$$u = -x_1 - x_2$$

Detta ger $\dot{V} = -2x_1^4 - 2x_1^2 < 0$ och stationär punkt $x_1 = x_2 = 0$.

(b) Att $SG = GS_u$ följer t.ex. av sambandet $(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}$ på sidan 169 i boken. $\det SG = \det GS_u \iff (\det S)(\det G) = (\det G)(\det S_u)$ vilket då $\det G \neq 0$ är ekvivalent med att $\det S = \det S_u$. En singulärvärdesfaktorisering av S och S_u ger att $S = U\Sigma V^T$ och $S_u = U_u \Sigma_u V_u^T$ där U, V, U_u, V_u är unitära matriser med determinant ett, och Σ, Σ_u är diagonala matriser med de singulära värdena i diagonalen. Av detta följer att determinanten av en matris är produkten av dess singulära värden och eftersom $\det S = \det \Sigma = \det \Sigma_u = \det S_u$ har vi bevisat påståendet.