1. (a) Systemets förstärkning vid frekvensen noll ges av det största singulära värdet till

$$G(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 10 \\ \frac{1}{5} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

De singulära värdena ges av kvadratroten ur egenvärdena till

$$G(0)^\mathsf{T} G(0) = \begin{bmatrix} \frac{29}{100} & \frac{16}{3} \\ \frac{16}{3} & \frac{925}{9} \end{bmatrix}.$$

Vi får att

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(\lambda I - G(0)^\mathsf{T} G(0)\right) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - \frac{29}{100} & -\frac{16}{3} \\ -\frac{16}{3} & \lambda - \frac{925}{9} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \left(\frac{925}{9} + \frac{29}{100}\right)\lambda + \frac{29 \cdot 925}{100 \cdot 9} - \frac{16^2}{3^2} \\ &\Leftrightarrow \\ \lambda &= \frac{1}{2}\left(\frac{925}{9} + \frac{29}{100}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{925}{9} + \frac{29}{100}\right)^2 + \frac{16^2}{3^2}} \\ &= \frac{92761 \pm \sqrt{8600193121}}{1800}. \end{aligned}$$

Det största singulära värdet och systemets försärkning vid frekvensen noll ges alltså av

$$\bar{\sigma}\big(G(0)\big) = \sqrt{\frac{92761 + \sqrt{8600193121}}{1800}} = 10.1516.$$

(b) Om vi har en reell nollställe, z, i högerhalvplan bör vi välja skärfrekvensen för känslighetsfunktionen $\omega_0 < \frac{z}{2}$. På samma sätt bör vi ha en skärfrekvens $\omega_0 < \frac{1}{T}$ om systemet har en tidsfördröjning på T sekunder. Det är i detta fall tidsfördröjningen som begränsar skärfrekvensen mest och vi bör se till att $\omega_0 < \frac{1}{2}$.

(c) Underdeterminanterna till $G_1(s)$ är

$$\frac{1}{s+1}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{vmatrix} = 0$$

Minsta gemensamma nämnaren är $s+1$. Vi har alltså en pol i $s=-1$.

Underdeterminanterna till $G_2(s)$ är

$$\frac{2}{s+1}, \ \frac{1}{s+1}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Minsta gemensamma nämnaren är $(s+1)^2$. Vi har alltså två poler i $s=-1$.

(d) Vi vill inte para ihop signaler som motsvarar negativa element i RGAn för frekvensen noll.

$$\mathrm{RGA}(G(0)) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{15}{14} \\ \frac{15}{14} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

Vi bör alltså para insignal ett med utsignal två och insignal två med utsignal ett.

2. (a) Blockschemaräkning ger sambandet

$$Y(s) = G(s)(U(s) + KY(s)) \Leftrightarrow (I - GK)Y = GU$$

Vi multiplicerar med G^{-1} från vänster och sätter in de givna beteckningarna för G^{-1} och K och får

$$U = (G^{-1} - K)Y = \left(\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix} \right) Y = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 \\ 0 & p_{22} \end{pmatrix} Y$$

Att matrisen framför Y är diagonal medför att även dess invers är det, således har vi perfekt frikoppling från u till y.

(b) Vad det gäller robusthet kan man se i figur 2 (i uppgiftsbeskrivningen) att den komplementära känslighetsfunktionen för design II (de streckade linjerna) generellt har lägre förstärkning än för design I (de heldragna linjerna). Enligt robusthetskriteriet (6.29) i reglerteoriboken kommer design II att ge ett system som klarar större modellfel utan risk för instabilitet än design I.

Design I är däremot bättre på att undertrycka lågfrekventa systemstörningar eftersom förstärkningen för känslighetsfunktionen för design I är mindre för låga frekvenser än den för design II (figur 1 i uppgiftsbeskrivningen).

Mätstörningarnas inverkan på reglerstorheten avgörs av den komplementära känslighetsfunktionen. Eftersom design II enligt figur 2 ger en komplementär känslighetsfunktion med lägre förstärkning än design I kommer mätstörningarna att påverka reglernoggrannheten mindre i design II än i design I.

3. (a) Beskrivande funktion för ett relä med dödzon (s 405):

$$Y_f = \frac{4}{\pi C}\sqrt{1 - \frac{1}{C^2}}, \quad C > 1$$

vilken alltid är reell. Grafen $-\frac{1}{Y_f}$ tillhör alltså negativa reella axeln. Den beskrivande funktionen börjar i $-\infty$ för $C = 1$ och närmar sig sedan origo för att sedan gå mot $-\infty$ när $C \to \infty$. Närmast origo är kurvan när $Y_f(C)$ antar sitt maxvärde. Vi har att

$$C^* = \arg\max_C Y_f(C) = \arg\max_C \frac{1}{C^2}(1 - \frac{1}{C^2})$$

vilket ger att $C* = \sqrt{2}$ och därmed $-\frac{1}{Y_f(C^*)} = -\frac{\pi}{2}$. Det linjära systemets Nyquistkurva

$$G(i\omega) = \frac{K}{i\omega(i\omega+1)(i\omega+2)}$$

skär den negativa reella axeln när $\omega_0 = \sqrt{2}$ och har då beloppet $|G(i\omega)| = \frac{K}{6}$. Systemet kommer alltså att sakna periodisk självsvängning om

$$\frac{K}{6} < \frac{\pi}{2} \to K < 3\pi$$

(b) Tillåten amplitud hos svängningen i e är $3 \to C = 3$. Vi ska lösa K ur ekvationen

$$-\frac{1}{Y_f(3)} = G(i\sqrt{2})$$

vilket direkt ger $K = \frac{27\pi}{4\sqrt{2}}$. Vinkelfrekvensen hos självsvängningen blir enligt a) $\omega_0 = \sqrt{2}$.

4. (a) Låt $f(x)$ beteckna högerledet i det givna systemet. Den givna lyapunovfunktionen V uppfyller $V(0) = 0$ och $V(x) > 0$ för alla

nollskilda x. Dessutom gäller det att $V(x) \to \infty$ då $|x| \to \infty$ samt att

$$\begin{aligned}
&V_x(x)f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_1^3 + e^{x_1} - 1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 - x_1^3 - e^{x_1} + 1 \end{pmatrix} \\
&= x_1x_2 + x_1^3x_2 + e^{x_1}x_2 - x_2 - x_1x_2 - x_2^2 - x_1^3x_2 - e^{x_1}x_2 + x_2 \\
&= -x_2^2 \le 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Kravet $V_x(x)f(x) \equiv 0$ medför att $x_2 \equiv 0$ och därmed, tillsammans med systembeskrivningen, att

$$\underbrace{-x_1 - x_1^3 - e^{x_1} + 1}_{=h(x_1)} \equiv 0 \tag{1}$$

Eftersom $h'(x_1) = -1 - 3x_1^2 - e^{x_1} < -1$ för alla x är h en strikt avtagande funktion. Den enda lösningen till $h(x_1) \equiv 0$ är därför $x_1 \equiv 0$. Ingen lösning förutom $x \equiv 0$ löper därför helt i det område där $V_x(x)f(x) = 0$ och sats 12.4 i reglerteoriboken ger att origo är en globalt asymptotiskt stabil jämviktspunkt till systemet. Stabiliteten kan alltså garanteras i hela tillståndsrummet.

(b) Det olinjära systemet kan ses som en sammansättning av det linjära systemet

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\
y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x
\end{aligned}$$

och den statiska olinjära återkopplingen

$$u = -k(y) = -\left(y^3 + e^y - 1\right)$$

Detta sätt att beskriva systemet gör att cirkelkriteriet i princip kan användas.