Tentamen i Programmeringsteori

Institutionen för datorteknik
Uppsala universitet
1995–10–25
Lärare: Parosh A. A., M. Kindahl
Plats: Polacksbacken
Skrivtid: 9 – 15
Hjälpmedel: Inga

Anvisningar:

1. Varje bevissteg ska motiveras formellt (informella bevis ger 0 poäng)
2. **Enkla** aritmetiska regler samt alla axiom och teorem i bilagan kan användas i bevisen
3. Lös endast en uppgift per blad
4. Skriv inte på baksidan
5. Skriv ditt namn på varje blad

Lycka till!

Final Exam in Programming Theory

Department of Computer Systems
Uppsala University
1995–10–25
Location: Parosh A. A., M. Kindahl
Plats: Polacksbacken
Time: 9 – 15
No books or calculator allowed

Directions:

1. Each proof step should be motivated formally (no credit for informal proofs)
2. **Simple** arithmetic rules and all the axioms and theorems in the appendix may be used in the proofs
3. Answer only one problem on each sheet of paper
4. Do not write on the back of the paper
5. Write your name on each sheet of paper

Good Luck!

Uppgift 1 (20 p)
Visa följande:

$$\left(\begin{array}{c} i < j+1 \\ \wedge \\ (\mathcal{N}k \ : \ i \leq k < j \ : \ b[k] \leq x) \ = \ 0 \end{array}\right) \implies (\mathcal{N}k \ : \ i \leq k < j+1 \ : \ b[k] \leq x) \ \leq \ 1$$

Problem 1 (20 p)
Prove the following:

$$\left(\begin{array}{c} i < j+1 \\ \wedge \\ (\mathcal{N}k \ : \ i \leq k < j \ : \ b[k] \leq x) \ = \ 0 \end{array}\right) \implies (\mathcal{N}k \ : \ i \leq k < j+1 \ : \ b[k] \leq x) \ \leq \ 1$$

Uppgift 2 (12 p)
Två program P_1 och P_2 sägs vara *ekvivalenta* omm $wp(P_1,\ R) = wp(P_2,\ R)$, för alla predikat R. Visa att programmen

$$\begin{array}{lllll} IF_1 : & \textbf{if} & B_1 & \rightarrow & S_1 \\ & \square & B_2 & \rightarrow & S_2 \\ & \textbf{fi} & & & \end{array}$$

och

$$\begin{array}{lllll} IF_2 : & \textbf{if} & B_1 & \rightarrow & S_1 \\ & \square & B_2 & \rightarrow & S_3 \\ & \textbf{fi} & & & \end{array}$$

är ekvivalenta, där S_3 definieras som:

$$\begin{array}{lllll} S_3 : & \textbf{if} & B_1 & \rightarrow & S_1 \\ & \square & B_2 & \rightarrow & S_2 \\ & \textbf{fi} & & & \end{array}$$

Problem 2 (12 p)
Two programs P_1 and P_2 are said to be *equivalent* iff $wp(P_1,\ R) = wp(P_2,\ R)$, for any predicate R. Show that the programs:

$$\begin{array}{lllll} IF_1 : & \textbf{if} & B_1 & \rightarrow & S_1 \\ & \square & B_2 & \rightarrow & S_2 \\ & \textbf{fi} & & & \end{array}$$

and

$$\begin{array}{lllll} IF_2 : & \textbf{if} & B_1 & \rightarrow & S_1 \\ & \square & B_2 & \rightarrow & S_3 \\ & \textbf{fi} & & & \end{array}$$

are equivalent, where S_3 is defined as:

$$\begin{array}{lllll} S_3 : & \textbf{if} & B_1 & \rightarrow & S_1 \\ & \square & B_2 & \rightarrow & S_2 \\ & \textbf{fi} & & & \end{array}$$

Uppgift 3 (25 p)
Betrakta följande program:

$$
\begin{array}{l}
\{Q:\ n \geq 0\} \\
found := F;\ i := 0; \\
\quad \mathbf{do} \quad \neg found\ \wedge\ (i \neq n+1)\ \wedge\ (b[i] \neq x)\ \rightarrow\ i := i+1 \\
\quad\ \ \square \quad \neg found\ \wedge\ (i \neq n+1)\ \wedge\ (b[i] = x)\ \rightarrow\ found := T \\
\quad \mathbf{od}
\end{array}
$$

Programmet använda för att hitta den minsta positionen mellan 0 och n i en array b så att $b[i] = x$. Om x inte förekommer i detta intervall, förblir flaggan *found* lika med F.
Definiera predikaten P_1, P_2, och P_3 som:

$$
\begin{array}{lcl}
P_1 & : & \neg found \implies \forall k\ :\ 0 \leq k < i\ :\ b[k] \neq x \\
P_2 & : & found \implies (0 \leq i \leq n)\ \wedge\ (\forall k\ :\ 0 \leq k < i\ :\ b[k] \neq x)\ \wedge\ (b[i] = x) \\
P_3 & : & 0 \leq i \leq n+1
\end{array}
$$

- Visa att $P_1\ \wedge\ P_2\ \wedge\ P_3$ är en invariant under exekveringen av loopen. (20 p)

- Hitta en lämplig gränsfunktion. (5 p)

Problem 3 (25 p)
Consider the following program:

$$
\begin{array}{l}
\{Q:\ n \geq 0\} \\
found := F;\ i := 0; \\
\quad \mathbf{do} \quad \neg found\ \wedge\ (i \neq n+1)\ \wedge\ (b[i] \neq x)\ \rightarrow\ i := i+1 \\
\quad\ \ \square \quad \neg found\ \wedge\ (i \neq n+1)\ \wedge\ (b[i] = x)\ \rightarrow\ found := T \\
\quad \mathbf{od}
\end{array}
$$

The program is used to find the smallest index in the interval 0 to n in an array b such that $b[i] = x$. If x does not occur in that interval then the flag *found* remains equal to F.
Define the predicates P_1, P_2, and P_3 as

$$
\begin{array}{lcl}
P_1 & : & \neg found \implies \forall k\ :\ 0 \leq k < i\ :\ b[k] \neq x \\
P_2 & : & found \implies (0 \leq i \leq n)\ \wedge\ (\forall k\ :\ 0 \leq k < i\ :\ b[k] \neq x)\ \wedge\ (b[i] = x) \\
P_3 & : & 0 \leq i \leq n+1
\end{array}
$$

- Show that $P_1\ \wedge\ P_2\ \wedge\ P_3$ is an invariant during the execution of the loop. (20 p)

- Find an appropriate bound function. (5p)

Uppgift 4 (20p) Betrakta problemet att beräkna *punktprodukten* $p = a \bullet b$ av två vektorer $a[0:n]$ och $b[0:n]$, där

$$a \bullet b = \sum_{i=0}^{n} a[i] * b[i].$$

Hitta slutvillkoret R, invarianten P, gränsfunktionen t, vakten B samt kommandona S_0 och S_1 så att programmet uppfyller specifikationen. Beskriv noga ur du kommer fram till lösningen.

$\{Q\colon\ n > 1\}$
$S_0;$
$\{\text{inv } P\colon\ ?\}$
$\{\text{bound } t\colon\ ?\}$
do $B \rightarrow S_1$ **od**
$\{R\colon\ ?\}$

Ledtrådar:

- Loopen har endast ett fall.

Problem 4 (20p) Consider the problem of computing the *dot product* $p = a \bullet b$ of two vectors $a[0:n]$ and $b[0:n]$, where

$$a \bullet b = \sum_{i=0}^{n} a[i] * b[i].$$

Develop the post-condition R, the invariant P, the bound function t, the guard B, and the statements S_0 and S_1 such that the program satisfies the specification. Motivate carefully how you find the solution.

$\{Q\colon\ n > 1\}$
$S_0;$
$\{\text{inv } P\colon\ ?\}$
$\{\text{bound } t\colon\ ?\}$
do $B \rightarrow S_1$ **od**
$\{R\colon\ ?\}$

Hints:

- The loop has only one guarded command.