TENTAMEN i
Systemidentifiering 4p
F4Sy & STS4

Tid: Fredag 19 mars 2004, kl 15.00–20.00.

Plats: Polacksbacken.

Ansvarig lärare: Erik Larsson, tel 018-4713153. Erik kommer och svarar på frågor ungefär kl 16.00 och kl 18.00.

Tillåtna hjälpmedel: Alla hjälpmedel (undantaget datorer) är tillåtna.

Preliminära betygsgränser: 3:[23, 33[, 4:[33, 43[, 5:[43, 50 = maxpoäng]

Uppgift 7 är istället för inlämningsuppgifterna. Om du väljer att göra uppgift 7 kommer det bästa resultatet (inlämningsuppgifterna eller uppgift 7) att räknas.

OBS: Endast en uppgift per ark. Skriv namn på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges).

OBS: På sista sidan av tentamen finns ett försättsblad, som ska fyllas i och lämnas in tillsammans med dina lösningar.

LYCKA TILL

Uppgift 1 Betrakta systemet

$$x(t) = A_0 + w(t), \qquad t = 1, \ldots, N$$

där A_0 är en okänd konstant och $w(t)$ är vitt brus med medelvärde noll ($E\,w(t) = 0$) och varians σ_t^2 ($E\,w^2(t) = \sigma_t^2$). Notera att variansen beror av t.

(a) Låt oss ansätta en modell enligt

$$x(t) = A + \varepsilon(t)$$

där $\varepsilon(t)$ beskriver ekvationsfelet. Bestäm minstakvadratskattningen $\hat{A}_{LS}$ av A. Bestäm även skattningens varians, dvs ta fram ett uttryck för $\mathrm{var}(\hat{A}_{LS}) = E\,(\hat{A}_{LS} - E\,\hat{A}_{LS})^2$. **(3p)**

(b) Ta fram BLUE (best linear unbiased estimate) $\hat{A}_{BLUE}$ av A_0 från systemet ovan. Bestäm även skattningens varians, dvs bestäm $\mathrm{var}(\hat{A}_{BLUE})$.**(3p)**

(c) Betrakta de tre fallen:

(1) Variansen σ_t^2 av $w(t)$ uppfyller $\sigma_t^2 = 1$.

(2) Variansen σ_t^2 av $w(t)$ uppfyller $\sigma_t^2 = t$. (Notera att $\sum_{t=1}^{\infty} 1/t \to \infty$.)

(3) Variansen σ_t^2 av $w(t)$ uppfyller $\sigma_t^2 = t^2$.

Bestäm huruvida skattningarna $\hat{A}_{LS}$ och $\hat{A}_{BLUE}$ är konsistenta för de tre fallen (1), (2) och (3). **(4p)**

Uppgift 2

(a) Härled en rekursiv metod i N för att beräkna följande kovariansskattning:

$$R_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} y(t)y(t+k)$$

Notera att $R_{N-1}(k)$ naturligtvis skall ingå i svaret. **(3p)**

(b) Skattningen av medelvärdet för en signal $y(t)$ baserat på de N_f sista mätvärdena ges av

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{N_f} \sum_{s=t-N_f+1}^{t} y(s)$$

Härled en rekursiv skattning av $\hat{m}(t)$ baserat på ovanstående skattning. Naturligtvis skall $\hat{m}(t-1)$ ingå i svaret. **(2p)**

Uppgift 3 Systemet

$$y(t) = G_0(q^{-1})u(t) + e(t)$$

där $G_0(q^{-1}) = 1 + q^{-1}$ och där $e(t)$ är vitt brus med medelvärde noll och varians σ^2, identifieras med en FIR modell av ordning ett:

$$y(t) = G(q^{-1}, \boldsymbol{\theta})u(t), \qquad G(q^{-1}, \boldsymbol{\theta}) = b_0 + b_1 q^{-1}$$

Ett stegsvarsexperiment

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

används för att samla in data: $u(t)$ och $y(t)$, $t = 1, \ldots, N$. Minstakvadratmetoden används för att skatta parametervektorn $\boldsymbol{\theta} = [\, b_0 \; b_1 \,]^T$.

(a) Visa att variansen för skattningarna $\hat{b}_0$ och $\hat{b}_1$ inte går mot noll då $N \to \infty$. **(3p)**

(b) Visa att skattningen av systemets statiska förstärkning $G(1, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ har en varians som går mot noll då $N \to \infty$. **(3p)**

(c) Förklara, i ord, paradoxen i uppgift (a) och (b). **(1p)**

Uppgift 4 Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) En konsistent skattning är alltid väntevärdesriktig.

(b) Antag att man har lyckats skatta en konsistent modell av ett återkopplat system (insignalen beror kausalt av utsignalen). Då gäller att $r_{\varepsilon u}(\tau) \approx 0 \; \forall \tau$, där $r_{\varepsilon u}(\tau)$ är korskorrelationen mellan modellens residual $\varepsilon(t)$ och insignalen $u(t)$.

(c) Signalen $u(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t)$ är p.e. (persistently exciting) av ordning två.

(d) Korrelationsanalys (Avsnitt 3.4 i boken) kan bara användas då insignalen väljs som vitt brus.

(e) Lösningen till minstakvadratproblemet $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_t (y(t) - \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta})^2$ har alltid en unik lösning.

(f) Akaikes informationskriterium (AIC) ger ej en konsistent skattning av modellordningen.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(6p)**

Uppgift 5 Ett system beskrivs av

$$y(t) = 0.7u(t-1) + 0.3u(t-2) + v(t), \quad t = 1, \dots, N$$

där $v(t)$ är vitt brus med medelvärde noll och varians λ^2. Man anpassar modellen

$$y(t) = bu(t-k) + \varepsilon(t)$$

med minstakvadratmetoden (dvs b skattas). Insignalen $u(t)$ är en stationär process med medelvärde noll och kovariansfunktion

$$R_u(0) = 1, \quad R_u(1) = 0.5, \quad R_u(\tau) = 0, \, |\tau| > 1$$

Vilket värde kommer skattningen av b att konvergera mot när antalet mätpunkter N går mot oändligheten? Undersök fallen $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ och $k > 3$. Antag att $u(t)$ och $v(t)$ är okorrelerade samt att processerna är ergodiska, dvs tidsmedelvärden övergår i väntevärden. Tex gäller

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t)u(t-k) \to E\,u(t)u(t-k) = R_u(k), \qquad N \to \infty$$

(6p)

Uppgift 6 Betrakta följande system

$$y(t) + ay(t-1) = b(t)u(t-1) + e(t), \quad t = 1, \dots, 300$$

där $u(t)$ och $e(t)$ är oberoende vita brus med medelvärde noll. Störningen $e(t)$ har en liten varians $E\,e^2(t) = 0.1$. Parametern $a = -0.7$ är konstant medan $b(t)$ varierar enligt en fyrkantvåg. För att identifiera systemet ansätts följande modell

$$y(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta} + \varepsilon(t)$$

där $\boldsymbol{\varphi}(t) = [\,-y(t-1)\;\, u(t-1)\,]^T$. Parametervektorn $\boldsymbol{\theta} = [\,a\;\, b\,]^T$ skattas rekursivt i tiden.

(a) Följande fyra metoder används för att identifiera systemet ovan:

(1) En rekursiv minstakvadratmetod med glömskefaktor $\lambda = 0.93$.

(2) Parametervariationen modelleras som en slumpvandring (random walk) och Kalman filtret används för att skatta parametrarna:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \boldsymbol{v}(t)$$
$$y(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

där kovariansmatrisen för $\boldsymbol{v}(t)$ väljs som

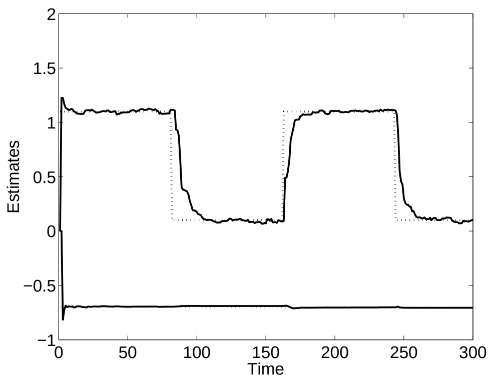
$$\boldsymbol{R}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

(3) Samma metod som föregående fast kovariansmatrisen för $\boldsymbol{v}(t)$ väljs som

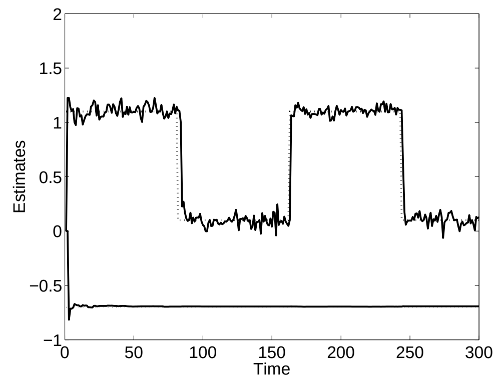
$$\boldsymbol{R}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) En rekursiv minstakvadratmetod med glömskefaktor $\lambda = 1$.

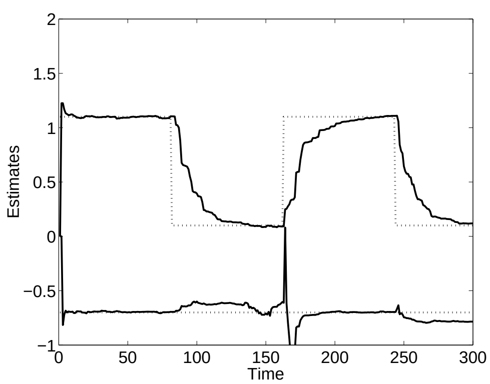
Resultaten från de fyra metoderna återfinns i figurerna (a)-(d) nedan. En streckad linje motsvarar ett sant parametervärde medan en heldragen linje är en skattning. Para ihop rätt metod med rätt resultat (rätt figur). Motivera noggrant! **(4p)**



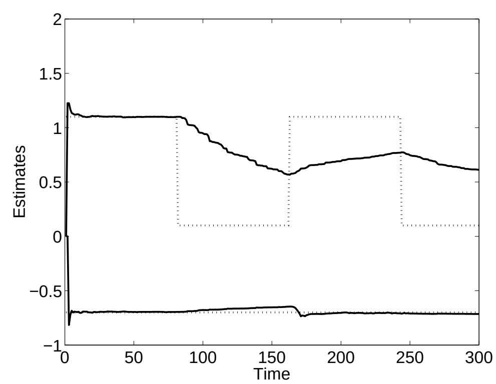
(a)



(b)



(c)



(d)

(b) Betrakta Figur (c). Förklara beteendet (det abrupta hoppet) för skattningen av a vid tiden $t \approx 160$. Varför uppvisar inte de övriga figurerna (de övriga metoderna) detta beteende? **(2p)**

Uppgift 7 *Denna uppgift är istället för inlämningsuppgifterna.*

Följande system är givet:

$$x(t) = a + n(t), \qquad t = 1, \ldots, N$$

där $n(t)$ är Gaussiskt fördelat vitt brus, $n(t) \sim N(0, a)$ och a är en okänd konstant. Notera att a dels är medelvärdet av $x(t)$ dels är variansen av $n(t)$.

(a) Bestäm det sk "maximum likelihood skattningen" $\hat{a}_{ML}$ av a, dvs

$$\hat{a}_{ML} = \arg\min_a l(a)$$
$$l(a) = \frac{N}{2}\log a + \frac{1}{2a}\sum_{t=1}^{N}(x(t) - a)^2$$

Ange ett explicit uttryck för $\hat{a}_{ML}$. **(4p)**

(b) Är skattningen $\hat{a}$ konsistent?
Ledning: Utnyttja att: $\frac{1}{N}\sum_t x^2(t) \to E\, x^2(t)$ då $N \to \infty$. **(2p)**

(c) Asymptotiskt (för stora värden på N) gäller

$$\operatorname{var} \hat{a}_{ML} = \left(E\,\frac{\partial^2 l(a)}{\partial a^2}\right)^{-1}$$

Visa att $\operatorname{var} \hat{a}_{ML}$ ges av

$$\operatorname{var} \hat{a}_{ML} = \frac{2a^2}{N(2a + 1)}$$

(4p)

Lösningar till tentamen i Systemidentifiering 04-03-19

1. (a) Enligt våra standardbeteckningar har vi $\varphi^T(t) = 1$, $\boldsymbol{R} = \text{diag}\,(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_N^2)$, $\boldsymbol{\Phi} = [1, \ldots, 1]^T$, $\boldsymbol{Y} = [x(1), \ldots, x(N)]^T$ och vi får enligt teorin:

$$\hat{A}_{LS} = (\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{Y} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x(t)$$

samt att

$$\text{var}(\hat{A}_{LS}) = (\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi})^{-1} = \frac{1}{N^2}\sum_{t=1}^{N}\sigma_t^2$$

(b) På samma sätt fås: ($\boldsymbol{R}^{-1} = \text{diag}\,(1/\sigma_1^2, \ldots, 1/\sigma_N^2)$)

$$\hat{A}_{BLUE} = (\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\sum_{t=1}^{N} 1/\sigma_t^2}\sum_{t=1}^{N} x(t)/\sigma_t^2$$

samt

$$\text{var}(\hat{A}_{BLUE}) = (\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{\Phi})^{-1} = \frac{1}{\sum_{t=1}^{N} 1/\sigma_t^2}$$

(c) Eftersom $w(t)$ har medelvärde noll är både $\hat{A}_{LS}$ och $\hat{A}_{BLUE}$ väntevärdesriktiga. Därmed är skattningen konsistent om variansen går mot noll då data går mot oändligheten.

- Fall (1): Det följer att

  $$\sum_{t=1}^{N}\sigma_t^2 = \sum_{t=1}^{N} 1/\sigma_t^2 = \sum_{t=1}^{N} 1 = N$$

  Därmed fås $\text{var}(\hat{A}_{LS}) = \text{var}(\hat{A}_{BLUE}) = 1/N \to 0$ då $N \to \infty$. Båda skattningarna är konsistenta!

- Fall (2): Det följer att

  $$\sum_{t=1}^{N}\sigma_t^2 = \sum_{t=1}^{N} t = \frac{N(N+1)}{2}$$
  $$\sum_{t=1}^{N} 1/\sigma_t^2 = \sum_{t=1}^{N} 1/t \to \infty, \quad N \to \infty$$

  Därmed fås $\text{var}(\hat{A}_{LS}) = \frac{N(N+1)}{2N^2} \to 1/2$ samt $\text{var}(\hat{A}_{BLUE}) \to 0$ då $N \to \infty$. $\hat{A}_{BLUE}$ är konsistent, medan $\hat{A}_{LS}$ ej är konsistent.

- Fall (3): Det följer att

$$\sum_{t=1}^{N} \sigma_t^2 = \sum_{t=1}^{N} t^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$
$$\sum_{t=1}^{N} 1/\sigma_t^2 = \sum_{t=1}^{N} 1/t^2 \to \frac{\pi^2}{6}, \quad N \to \infty$$

  Därmed fås $\text{var}(\hat{A}_{LS}) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N^2} \to \infty$ samt $\text{var}(\hat{A}_{BLUE}) \to \frac{6}{\pi^2}$ då $N \to \infty$. Ingen av skattningarna är konsistenta.

2. **(a)** Det följer att

$$\begin{aligned} R_N(k) &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k} y(t)y(t+k) = \frac{N-1}{N}\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N-1-k} y(t)y(t+k) + \frac{1}{N}y(N-k)y(N) \\ &= \frac{N-1}{N}R_{N-1}(k) + \frac{1}{N}y(N-k)y(N) \end{aligned}$$

Alternativt kan vi omformulera detta till

$$R_N(k) = R_{N-1}(k) + \frac{1}{N}\Big[y(N-k)y(N) - R_{N-1}(k)\Big]$$

(b) Det följer att

$$\begin{aligned} \hat{m}(t) &= \frac{1}{N_f}\sum_{s=t-N_f+1}^{t} y(s) = \frac{1}{N_f}\Big[\sum_{t=t-N_f}^{t-1} y(s) + \big(y(t) - y(t-N_f)\big)\Big] \\ &= \hat{m}(t-1) + \frac{1}{N_f}\big(y(t) - y(t-N_f)\big) \end{aligned}$$

3. Modell: (Notera att modellen är statisk)

$$y(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\varphi}^T(t) = [u(t)\ \ u(t-1)]$$

(a) Vi får enligt (4.12)

$$\begin{aligned} \text{cov}\,(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \sigma^2\Big(\sum_{t=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^T(t)\Big)^{-1} = \sigma^2\Big(\sum_{t=1}^{N}\begin{bmatrix} u^2(t) & u(t)u(t-1) \\ u(t-1)u(t) & u^2(t-1)\end{bmatrix}\Big)^{-1} \\ &= \sigma^2\begin{bmatrix} N & N-1 \\ N-1 & N-1\end{bmatrix}^{-1} = \sigma^2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{N}{N-1}\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Därmed gäller $\text{var}(\hat{b}_0) = \sigma^2$ och $\text{var}(\hat{b}_1) = \sigma^2\frac{N}{N-1} \to \sigma^2$ då $N \to \infty$.
(b) Vi har att

$$G(1, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 = [1\ 1]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Därmed fås

$$\text{var}\, G(0, \boldsymbol{\theta}) = [1\ 1]\,\text{cov}\,(\hat{\boldsymbol{\theta}})[1\ 1]^T = [1\ 1]\sigma^2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{N}{N-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{N-1}$$

Därmed gäller var $G(0, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma^2}{N-1} \to 0$, $N \to \infty$.

(c) För att kunna identifiera flera parametrar konsistent behövs en variationsrik insignal (persistently exciting, p.e.). Ett steg är p.e. av ordning 1. Därmed kan vi inte skatta två parametrar konsistent, vilket ger resultat (a). Ett steg är en statisk signal (har all energi vid $\omega = 0$). Därmed kan den statiska förstärkningen skattas konsistent.

Alternativ lösning av uppgiften: Notera att i frekvensdomänen har vi (insignalens spektrum är $\Phi_u(\omega) = \delta_{\omega,0}$):

$$V(\boldsymbol{\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} |G_0(e^{i\omega}) - G(e^{i\omega}, \boldsymbol{\theta})|^2 \Phi_u(\omega)\, d\omega = |G_0(1) - G(1, \boldsymbol{\theta})|^2$$

där $V(\boldsymbol{\theta})$ är minimeringskriteriet. Alltså, minimum av $V(\boldsymbol{\theta})$ fås för $\hat{b}_0 + \hat{b}_1 = G_0(1)$, vilket innebär att $\hat{b}_0 = b_0 + \gamma$, $\hat{b}_1 = b_1 - \gamma$ för ett godtyckligt γ. Med andra ord, vi har ej en unik skattning. Dock fås $G(1, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = G_0(1)$ unikt.

4.

(a) falskt (se tex Problem 2.3 i boken) **(b)** falskt (se sidan 500 i boken) **(c)** sant (se sidan 125 i boken) **(d)** falskt se sidan 42 i boken) **(e)** falskt se sidan 63 i boken) **(f)** sant (se sidan 446 i boken)

5.

Minstakvadratskattningen av b ges av

$$\hat{b} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)u(t-k)}{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u^2(t-k)} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \big(0.7u(t-1) + 0.3u(t-2) + v(t)\big)u(t-k)}{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u^2(t-k)}$$
$$\to \frac{0.7R_u(k-1) + 0.3R_u(k-2)}{R_u(0)}, \quad N \to \infty$$

Eftersom $R_u(-\tau) = R_u(\tau)$ och $R_u(0) = 1$ fås:

- $k = 1$: $\hat{b} = 0.7R_u(0) + 0.3R_u(1) = 0.7 + 0.3 \times 0.5 = 0.85$.
- $k = 2$: $\hat{b} = 0.7R_u(1) + 0.4R_u(0) = 0.7 \times 0.5 + 0.3 = 0.65$.
- $k = 3$: $\hat{b} = 0.7R_u(2) + 0.3R_u(1) = 0.3R_u(1) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$.
- $k > 3$: $\hat{b} = 0$.

6. (a)

- Metod (1) ger Figur (c). I Figur (c) påverkas skattningen av båda parametrarna. Vi har adaption till ny data. $\Rightarrow$ RLS med glömskefaktor $\lambda < 1$.
- Metod (2) ger Figur (a). I Figur (a) påverkas bara skattningen av b. Adaptionen till ny data är långsammare än i Figur (b) $\Rightarrow$ Slumpvandring med Kalmanfilter då “$\boldsymbol{R}$ är liten” (variansen för b). Modellen i metod (2) säger att a parametern är konstant.

- Metod (3) ger Figur (b). I Figur (b) påverkas bara skattningen av b. Adaptionen till ny data är snabbare än i Figur (a) $\Rightarrow$ Slumpvandring med Kalmanfilter då "$\boldsymbol{R}$ är stor" (variansen för b). Modellen i metod (3) säger att a parametern är konstant.

- Metod (4) ger Figur (d). I Figur (d) har vi dålig anpassning till nytt data. Skattningen av b verkar konvergera mot medelvärdet av $b(t)$. $\Rightarrow$ RLS med glömskefaktor $\lambda = 1$.

(b) Då $\lambda < 1$ fås, på grund av den dåliga excitationen ($b(t)$ liten) från tidpunkt $80 < t < 160$, s.k. "estimator windup". Kovariansmatrisen av skattningen växer och därmed fås en abrupt förändring av skattningen då systemet återigen får bra excitation vid $t = 160$. Jämför med exemplet på föreläsning!

Fenomenet uppträder vid rekursiv identifiering med glömskefaktor $\lambda < 1$.

7. (a) Differentiering av $l(a)$ ger

$$\frac{\partial\, l(a)}{\partial a} = \frac{N}{2a} - \frac{1}{2a^2}\sum_{t=1}^{N}\big(x(t)-a\big)^2 - \frac{1}{a}\sum_{t=1}^{N}\big(x(t)-a\big)$$

Genom att sätta detta uttryck lika med noll och lösa för a fås:

$$\hat{a}_{ML} = \frac{\sqrt{1+4\gamma_N}-1}{2}$$

där

$$\gamma_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x^2(t)$$

Notera att du får två lösningar $\hat{a}_{ML}$, varav den ena blir negativ. Eftersom a är variansen av $n(t)$ måste $a > 0$ gälla.

(b) Då $N \to \infty$ fås

$$\gamma_N \to E\, x^2(t) = E\,\big(a + n(t)\big)^2 = a^2 + a$$

Därmed gäller

$$\hat{a}_{ML} = \frac{\sqrt{1+4(a^2+a)}-1}{2} = \frac{\sqrt{(2a+1)^2}-1}{2} = a$$

Alltså $\hat{a}_{ML}$ är konsistent!

(c) Differentiering av $l(a)$ två gånger ger:

$$\frac{\partial^2\, l(a)}{\partial a^2} = -\frac{N}{2a^2} + \frac{1}{a^3}\sum_{t=1}^{N}\big(x(t)-a\big)^2 + \frac{2}{a^2}\sum_{t=1}^{N}\big(x(t)-a\big) + \frac{N}{a}$$

Genom att applicera väntevärdesoperatorn fås

$$E\,\frac{\partial^2\, l(a)}{\partial a^2} = -\frac{N}{2a^2} + \frac{N}{a^2} + \frac{N}{a} = \frac{N}{2a^2}(2a+1)$$

vilket ger det önskade resultatet. Du kan notera att variansen för $\hat{a}_{ML}$ är mindre än variansen för minstakvadratskattningen $\hat{a}_{LS}$ av a ($\mathrm{var}(\hat{a}_{LS}) = a/N$).