TENTAMEN
Systemidentifiering, 4p, F, FRI, STS

Tid: Fredagen den 17 mars kl 09.00–14.00

Plats: Polacksbacken, skrivsal

Ansvarig lärare: Alexander Medvedev,
telefon 471 3064, mobil 070 57 48 173. Alexander kommer och svarar på frågor ungefär kl 11.00

Tillåtna hälpmedel: Alla hjälpmedel är tillåtna

Preliminära betygsgänser: 3:[15, 20[, 4:[20, 25[, 5:[25, 30 = maxpoäng]

Poäng för inlämningsuppgifterna adderas till resultatet på tentan.

OBS: Endast en uppgift per ark. Skriv namn på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade.

LYCKA TILL!

Uppgift 1 Förstärkningen b i ett statiskt system

$$y(t) = bu(t) + e(t)$$

skattas m h a minsta-kvadrat metoden utifrån en datamängd bestående av N mätpunkter $(y(t), u(t)), t = 1, \ldots, N$. Brussekvensen $e(t)$ antas vara vit med $E\{e(t)\} = 0$, $E\{e^2(t)\} = \lambda^2$. Härled uttrycket för minsta-kvadrat skattningen $\hat{b}$ i termer av de mätbara storheterna y, u **(3p)**

Hur förändras variansen av $\hat{b}$ då

(a) antalet mätningar i datamängden N ökar? **(1p)**

(b) amplituden på insignalen $u(t)$ ökar? **(1p)**

(c) brusnivån ökar? **(1p)**

Uppgift 2 En optimal enstegsprediktor ges av ekvationen

$$\hat{y}(t+1|t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha q^{-1}} y(t)$$

där $y(t)$ är utsignalen hos en ARMA-modell och α är en konstrant.

(a) Vilken ARMA-modell motsvarar prediktorn? **(4p)**

(b) Vad är $\hat{y}(t+1|t)$ då $y = m =$ const. **(2p)**

Uppgift 3 Betrakta systemet

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) + abu(t-2) + e(t)$$

där a, b är konstanter och $u(t)$ är vitt brus med $E\{u(t)\} = 0$ och $E\{u^2(t)\} = 1$. Anta också att $e(t)$ är oberoende av $u(t)$. Undersök huruvida instrument-variabelsskattningen med instrumentena

$$z(t) = \begin{bmatrix} u(t-1) & u(t-2) & u(t-3) \end{bmatrix}$$

är konsistent. **(6p)**

Uppgift 4 Systemet

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) + e(t)$$

med tillräckligt exciterande $e(t)$ styrs av en känd statisk återkoppling d v s

$$u(t) = -fy(t)$$

Föreslå tre olika metoder för indentifiering av a och b genom erforderliga förändringar i regulatorn. Varje föreslagen metod ger 2 poäng vid fullständig beskrivning. **(6p)**

Uppgift 5 Vektorn θ i modellen

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + e(t)$$

skattas m h a rekursiva minsta-kvadrat metoden (RLS)

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + P(t)\varphi(t)\left(y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)\right) \\
P(t) &= \frac{1}{\lambda}\left(P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{\lambda + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}\right)
\end{aligned}$$

där λ är en glömskefaktor.

Visa att RLS ger exakt samma skattning som ”batch”-skattningen

$$\hat{\theta}_t = \left(\sum_{s=1}^{t} \lambda^{t-s}\varphi(s)\varphi^T(s)\right)^{-1} \sum_{s=1}^{t} \lambda^{t-s}\varphi(s)y(s)$$

då $t \to \infty$ och $\lambda^t P(t) \to 0$.

(6p)

Lösningar till tentamen i Systemidentifiering 4p 06-03-17

Uppgift 1

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\varphi^T(t) \right)^{-1} \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)y(t) = \frac{1}{\sum_{t=1}^{N} u^2(t)} \sum_{t=1}^{N} u(t)y(t)$$

$$\text{var } \hat{b} = \frac{\lambda^2}{\sum_{t=1}^{N} u^2(t)}$$

(a) $N \uparrow \Rightarrow \text{var } \hat{b} \downarrow$
(b) $|u(t)| \uparrow \Rightarrow \text{var } \hat{b} \downarrow$
(c) $\lambda^2 \uparrow \Rightarrow \text{var } \hat{b} \uparrow$

Uppgift 2 (a) Modell

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) + e(t) + ce(t-1)$$

(7.26) i Söderström och Stoica

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{bq^{-1}}{1+cq^{-1}} u(t) + \frac{(c-a)q^{-1}}{1+cq^{-1}} y(t)$$

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ c - a &= 1 - \alpha \\ -\alpha &= c \end{aligned}$$

Det innebär att $-\alpha = c$. ARMA-modellen således är

$$y(t) - y(t-1) = e(t) - \alpha e(t-1)$$

(b)

$$\hat{y}(t+1|t) = \left. \frac{1-\alpha}{1-\alpha q^{-1}} \right|_{q=1} m = m$$

Uppgift 3

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=1}^{N} z(t)\varphi^T(t) \right)^{-1} \sum_{t=1}^{N} z(t)y(t)$$

$$R = E\{z(t)\varphi^T(t)\}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ ab - ab & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisen R är singulärt och skattningen kan således inte garanteras vara konsistent.

Uppgift 4 (a) Extra exciterande signal till det slutna systemet

$$u(t) = -fy(t) + v(t)$$

där $v(t)$ är vitt brus. Eftersom både $u(t)$ och $y(t)$ är mätbara kan det slutna systemet identifieras som tidsserie

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

(b) Tidsvarierande förstärkning i återkopplingen

$$y(t) = (a - fb)y(t-1) + e(t)$$

Systemet identifieras med två olika värden på f, d v s f_1 och f_2 vilket ger

$$\begin{bmatrix} 1 & -f_1 \\ 1 & -f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{c1} \\ \hat{a}_{c2} \end{bmatrix}$$

och $\hat{a}$ och $\hat{b}$ kan bestämmas.

(c) Tidsfördröjning i återkopplingen

$$u(t) = -fy(t-1)$$

$$y(t) + ay(t-1) + fby(t-2) = e(t)$$

Om f är känt så kan både a och b skattas.

Uppgift 5 Först härleder man en rekursiv ekvation för storheten $x(t)$ som ges av

$$\begin{aligned} x(t) &= P^{-1}(t)\hat{\theta}(t) = P^{-1}\hat{\theta}(t-1) + \varphi(t)\left(y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)\right) \\ &= \left(P^{-1}(t) - \varphi(t)\varphi^T(t)\right)\hat{\theta}(t-1) + \varphi(t)y(t) \\ &= \lambda x(t-1) + \varphi(t)y(t) \end{aligned}$$

Då drar man slutsatsen att

$$x(t) = \lambda^t x(0) + \sum_{s=1}^{t} \lambda^{t-s}\varphi(s)y(s)$$

Skillnaden mellan den rekursiva och den satsvisa skattningen är

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}_t &= P(t)P^{-1}(t)\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}_t = P(t)x(t) - \hat{\theta}_t \\ &= P(t)\left(\lambda^t x(0) + \sum_{s=1}^{t}\lambda^{t-s}\varphi(s)y(s) - P^{-1}(t)\hat{\theta}_t\right) \\ &= P(t)\left(\lambda^t P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \sum_{s=1}^{t}\lambda^{t-s}\varphi(s)y(s) - \left(\lambda^t P^{-1}(0) + \sum_{s=1}^{t}\lambda^{t-s}\varphi(s)\varphi^T(s)\right)\hat{\theta}_t\right) \\ &= P(t)\lambda^t P^{-1}(0)\left(\hat{\theta}(0) - \hat{\theta}_t\right) \end{aligned}$$

Tydligen, $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}_t \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$, $P(t)\lambda^t \rightarrow 0$ och $|\hat{\theta}_t|$ är begränsad.